

Математична логіка. Побудова таблиць істинності.

Булева алгебра – алгебра $(B; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ з двоелементною множиною-носієм $B = \{0, 1\}$, операціями \wedge (кон'юнкцією), \vee (диз'юнкцією), \neg (запереченням або інверсією) і константами 0 і 1.

Константи 0 і 1 називають *булевими константами*; змінні $x_1, x_2, \dots, y, \dots$, які можуть приймати лише вказані два значення (0 і 1), – *булевими змінними*.

Булевою функцією $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають функцію, яка разом з її n аргументами може набувати лише двох значень: 0 або 1. Областю визначення булевої функції n аргументів є сукупність 2^n булевих наборів значень її аргументів. Основні способи задання булевої функції – аналітичний (опис функції аналітичним виразом – формулою) і табличний (подання функції таблицею істинності, в якій для кожного можливого набору значень аргументів вказане відповідне значення функції). На відміну від табличного способу, згідно з яким будь-яку булеву функцію визначає єдина для неї таблиця істинності, відповідно до аналітичного способу кожен булеву функцію може бути визначено багатьма різними формулами. Спрощеним варіантом табличного способу є векторний – задання функції n аргументів у вигляді 2^n -вимірного вектора, i -та координата якого ($i = 0, 1, \dots, n$) дорівнює значенню функції (0 або 1) на i -ому наборі значень аргументів. Так, наприклад, функцію, що розглянута в 2.1.01, можна задати вектором $F(x, y, z) = (11010101)$.

Існує 4 булеві функції однієї змінної $f(x)$ (табл. 2.1), які визначені на множині $B = \{0, 1\}$, і 16 булевих функцій двох змінних $f(x_1, x_2)$ (табл. 2.2), що визначені на множині чотирьох наборів значень аргументів x_1, x_2 : $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Таблиця 2.1

Позначення функції	Найменування функції	$x = 0$	$x = 1$
$f_0(x) = 0$	Константа 0	0	0
$f_1(x) = x$	Повторення аргументу x	0	1
$f_2(x) = \bar{x}$	Інверсія x (заперечення x , НЕ x)	1	0
$f_3(x) = 1$	Константа 1	1	1

Таблиця 2.2

Позначення функції	Найменування Функції	x			
		0	0	1	1
		y			
		0	1	0	1
$f_0(x, y) = 0$	Константа 0	0	0	0	0
$f_1(x, y) = x \wedge y = xy = x \& y$	Кон'юнкція (логічне множення)	0	0	0	1
$f_2(x, y) = x \nabla y = \overline{x \rightarrow y}$	Інверсія імплікації (від x до y)	0	0	1	0
$f_3(x, y) = x$	Повторення x (змінна x)	0	0	1	1
$f_4(x, y) = y \nabla x = \overline{x \leftarrow y}$	Інверсія оберненої імплікації (від y до x)	0	1	0	0
$f_5(x, y) = y$	Повторення y (змінна y)	0	1	0	1
$f_6(x, y) = x \oplus y = \overline{x \sim y}$	Нерівносильність (сума за модулем 2)	0	1	1	0
$f_7(x, y) = x \vee y = x + y$	Диз'юнкція (логічне додавання)	0	1	1	1
$f_8(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$	Стрілка Пірса (інверсія диз'юнкції)	1	0	0	0
$f_9(x, y) = x \sim y$	Еквівалентність (рівносильність)	1	0	0	1
$f_{10}(x, y) = \bar{y}$	Інверсія y (заперечення y , НЕ y)	1	0	1	0
$f_{11}(x, y) = x \leftarrow y$	Обернена імплікація (від y до x)	1	0	1	1
$f_{12}(x, y) = \bar{x}$	Інверсія x (заперечення x , НЕ x)	1	1	0	0
$f_{13}(x, y) = x \rightarrow y$	Імплікація (від x до y)	1	1	0	1
$f_{14}(x, y) = x y = \overline{x \wedge y}$	Штрих Шеффера (інверсія кон'юнкції)	1	1	1	0
$f_{15}(x, y) = 1$	Константа 1	1	1	1	1

Завдання. Побудувати таблицю істинності наведеної формули

$$F_1 = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \wedge y \sim (x \oplus z))$$

Складемо таблицю істинності даної формули:

x	y	z	\bar{x}	$\bar{x} \rightarrow y$	$\bar{x} \cdot y$	$x \oplus z$	$\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus z)$	F_1
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	1

Індивідуальні завдання.

Завдання 1. У задачах 01 – 30 потрібно побудувати таблицю істинності наведеної формули $F(x, y, z)$.

1. $F_1 = ((x \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) | (\bar{x} \rightarrow \bar{y} \wedge z)) \wedge (x \rightarrow (y \sim z))$
2. $F_1 = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \wedge (x \oplus y \wedge z)$
3. $F_1 = \overline{x \rightarrow y} \oplus ((y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow x \wedge y)$
4. $F_1 = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$
5. $F_1 = (((x \vee y) \rightarrow y \wedge z) \downarrow (y \rightarrow x \wedge z)) \vee (x \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z))$
6. $F_1 = ((x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow (x \rightarrow z))) \oplus ((x \vee x \wedge y) \wedge y \wedge z)$
7. $F_1 = (x \wedge y \vee (\bar{x} \rightarrow y \wedge z)) \sim ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z)$
8. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \rightarrow ((y | \bar{z}) \rightarrow (x \sim x \wedge z))$
9. $F_1 = \left(\overline{x \oplus y \wedge z} \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z)) \right) | \bar{x}$
10. $F_1 = x \rightarrow ((\bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{z} \rightarrow y)) \rightarrow y) \wedge z$
11. $F_1 = (\bar{x} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow (x \sim z))) \wedge (x \sim (y \rightarrow (z \vee (x \rightarrow y))))$
12. $F_1 = (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (x \vee z)))$
13. $F_1 = (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z) \oplus ((y \rightarrow z) \rightarrow \bar{x} \wedge y)$
14. $F_1 = (x \vee (y \rightarrow z)) \wedge ((x \wedge y) \downarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})) | x$
15. $F_1 = \overline{(x \sim y) \rightarrow (x \rightarrow \bar{z})} \vee (x \oplus \bar{y} \wedge z)$
16. $F_1 = ((\bar{x} \wedge \bar{z} \vee y) | (\bar{y} \rightarrow \bar{x} \wedge z)) \wedge (y \rightarrow (x \sim z))$

17. $F_1 = \overline{(x \sim y) \vee (x \downarrow z) \wedge (x \oplus y \wedge z)}$
18. $F_1 = \overline{y \rightarrow x} \oplus ((x \rightarrow \bar{z}) \rightarrow x \wedge y)$
19. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \downarrow (\bar{y} \rightarrow (x \rightarrow z))$
20. $F_1 = (((x \vee y) \rightarrow x \wedge z) \downarrow (x \rightarrow y \wedge z)) \vee (y \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z))$
21. $F_1 = ((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \sim (y \rightarrow x)) \oplus ((x \wedge y \vee y) \wedge x \wedge z)$
22. $F_1 = (x \wedge z \vee (\bar{x} \rightarrow y \wedge z)) \oplus ((\bar{x} \rightarrow \bar{z}) \rightarrow y)$
23. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \rightarrow ((y | z) \rightarrow (x \sim x \wedge \bar{z}))$
24. $F_1 = \overline{(x \oplus y \wedge z \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (z \rightarrow y)))} \wedge \bar{x}$
25. $F_1 = y \rightarrow ((\bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow (x \leftarrow \bar{y} \wedge \bar{z})) \rightarrow x) \wedge z$
26. $F_1 = (\bar{z} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow (x \sim z))) \wedge (z \sim (y \rightarrow (x \vee (z \rightarrow y))))$
27. $F_1 = (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (x \vee y)))$
28. $F_1 = (\bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge z) \oplus ((x \rightarrow z) \rightarrow x \wedge \bar{y})$
29. $F_1 = ((x \vee (z \rightarrow y)) | ((x \wedge z) \downarrow (\bar{x} \wedge \bar{z}))) \vee \bar{x}$
30. $F_1 = \overline{(x \sim z) \rightarrow (x \rightarrow \bar{y})} \vee (x \oplus y \wedge \bar{z})$

Завдання 2. У задачах 01 – 30 потрібно побудувати таблицю істинності наведеної формули $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

1. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \leftarrow x_3) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \sim (x_3 \oplus x_4))$.
2. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \leftarrow x_2) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \oplus (x_3 \oplus x_4))$.
3. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 \wedge x_3 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3)$.
4. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 \rightarrow \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \oplus (x_3 \sim x_4))$.
5. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \leftarrow (\bar{x}_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_3 \sim x_4)$.
6. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_2 \vee (x_1 \oplus x_4)) \rightarrow (x_1 \leftarrow x_4) \wedge x_3$.
7. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2) \leftarrow (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \oplus x_4)$.
8. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge (x_3 \sim x_4) \leftarrow (\bar{x}_2 \rightarrow x_3 \wedge \bar{x}_4)$.
9. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 \sim x_2) \leftarrow (\bar{x}_3 \rightarrow x_4)) \vee x_3 \wedge x_4$.
10. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_2 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \oplus x_2) \wedge \bar{x}_3$.
11. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \rightarrow ((x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \sim (x_3 \sim x_4))$.

12. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 \mid \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim (x_3 \sim x_4)).$
13. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \vee ((x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \sim (x_3 \leftarrow \bar{x}_4)).$
14. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow ((x_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4)).$
15. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge \bar{x}_2 \vee (\overline{(x_1 \leftarrow x_2) \oplus (\bar{x}_3 \rightarrow x_4)}).$
16. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \leftarrow x_2) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim (x_3 \oplus x_4)).$
17. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4)).$
18. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow ((\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4)).$
19. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_2 \mid x_4) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \sim x_4)).$
20. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \leftarrow (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \sim x_4).$
21. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \rightarrow x_3 \wedge x_4) \rightarrow x_2 \wedge (x_3 \oplus x_4).$
22. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \leftarrow (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_3 \oplus \bar{x}_4).$
23. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow (\overline{(x_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4)}).$
24. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \leftarrow \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \sim x_2) \wedge x_4.$
25. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 \oplus x_2) \leftarrow (x_3 \leftarrow \bar{x}_4)) \vee x_3 \wedge x_4.$
26. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_3) \rightarrow ((\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \sim (\bar{x}_3 \sim x_4)).$
27. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_3) \rightarrow ((\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4)).$
28. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow ((x_1 \mid x_2) \sim (\bar{x}_3 \leftarrow x_4)).$
29. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \mid x_3) \rightarrow ((x_1 \vee x_2) \oplus (\bar{x}_3 \oplus x_4)).$
30. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \vee (\overline{(x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_3 \leftarrow \bar{x}_4)}).$